





Compensación dinámica de par mediante identificación en tiempo finito para el control de un péndulo de un grado de libertad

Dynamic torque compensation via finite-time identification for the control of a one-degree-of-freedom pendulum

Alvarez Sánchez, Ervin Jesús^{1*} ; Aldana Franco, Fernando¹ ; Leyva Retureta, José Gustavo¹ ; Sánchez Moreno, Alejandro¹ 

Historial del artículo

Recibido: 25-nov-2025

Aceptado: 30-ene-2026

Publicado: 30-mar-2026

Palabras clave

ES: técnica de Fliess, incertidumbre dinámica, métricas de desempeño, principio de certeza equivalente, aniquilación algebraica

EN: Fliess technique, dynamic uncertainty, performance metrics, certainty equivalence principle, algebraic annihilation

RESUMEN

Este trabajo aborda el problema de la incertidumbre paramétrica en la inercia de sistemas mecánicos no lineales, centrandolo en un péndulo de un solo eslabón sometido a variaciones dinámicas de carga. El objetivo principal es garantizar la robustez del seguimiento de trayectoria mediante la integración de una técnica de identificación algebraica propuesta por Fliess y un esquema de control por par calculado. La metodología se fundamenta en la manipulación de las ecuaciones diferenciales en el dominio complejo de Laplace, aplicando operadores de aniquilación para eliminar la dependencia de las condiciones iniciales desconocidas. Mediante el uso de integrales iteradas, el estimador logra aislar el valor de la inercia en tiempo finito, proporcionando una señal filtrada y robusta ante el ruido sensorial que caracteriza a los sensores reales. Para validar la propuesta, se realizaron simulaciones numéricas en MATLAB con un tiempo de muestreo de un milisegundo, evaluando métricas críticas como el error cuadrático medio (RMSE) y la integral del error absoluto ponderado por el tiempo (ITAE). Los resultados demuestran que el controlador adaptable logra una mejora superior al 68% en la precisión del seguimiento y una reducción del 90% en el error acumulado en comparación con un control nominal de parámetros fijos. El sistema demostró una transición eficiente de perturbaciones internas oscilatorias continuas a respuestas transitorias mínimas de forma triangular, confirmando que la actualización paramétrica en línea permite mantener la estabilidad y el desempeño invariante del lazo cerrado frente a cambios estructurales imprevistos en el hardware operativo.

ABSTRACT

This work addresses the problem of parametric uncertainty in the inertia of nonlinear mechanical systems, focusing the study on a single-link pendulum subjected to dynamic load variations. The main objective is to guarantee trajectory tracking robustness by integrating an algebraic identification technique proposed by Fliess and a computed torque control scheme. The methodology is based on the manipulation of differential equations in the complex Laplace domain, applying annihilation operators to eliminate dependency on unknown initial conditions. Through the use of iterated integrals, the estimator manages to isolate the inertia value in finite time, providing a filtered and robust signal against the sensory noise that characterizes real sensors. To validate the proposal, numerical simulations were performed in MATLAB with a sampling time of one millisecond, evaluating critical metrics such as the root mean square error (RMSE) and the integral of time-weighted absolute error (ITAE). The results demonstrate that the adaptive controller achieves an improvement of over 68% in tracking precision and a 90% reduction in cumulative error compared to a fixed-parameter nominal control. The system demonstrated an efficient transition from continuous oscillatory internal disturbances to minimal triangular-shaped transient responses, confirming that online parametric updating allows for maintaining stability and invariant closed-loop performance in the face of unforeseen structural changes in the operating hardware.

¹ Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. [Universidad Veracruzana](#)

* Autor de correspondencia: eralvarez@uv.mx



1. Introducción

En la era de la automatización industrial y la robótica de alta precisión, la capacidad de los sistemas mecánicos para ejecutar tareas con errores mínimos es un requisito fundamental. Los sistemas de un grado de libertad (1-GDL) pueden ser ejemplificados por un péndulo simple debido a la facilidad con la que se pueden mostrar conceptos claves [1, 2], por lo que representan la unidad básica de análisis para una vasta gama de mecanismos, desde articulaciones de brazos robóticos y sistemas de apertura de compuertas, hasta estabilizadores de carga en grúas automatizadas. Sin embargo, la transición de los modelos teóricos a la implementación en entornos reales revela una brecha crítica: la presencia de incertidumbres paramétricas y su impacto en el control robusto [3].

La mayoría de las estrategias de control tradicionales, como el PID o el LQR, se sintonizan basándose en parámetros nominales, que son valores constantes obtenidos mediante mediciones estáticas o especificaciones de catálogo del fabricante, tales como la masa del eslabón, la longitud de la barra o el coeficiente de fricción del rodamiento. No obstante, un sistema mecánico real es una entidad dinámica y cambiante [4].

Cuando un controlador se sintoniza para una inercia nominal (J_0), su desempeño está optimizado estrictamente para ese valor, por lo que si el parámetro experimenta una desviación, el comportamiento del sistema en lazo cerrado deja de ser óptimo. Matemáticamente, esto se traduce en un movimiento de los polos del sistema hacia regiones de menor estabilidad, lo que físicamente se manifiesta como aumento del sobrepaso, oscilaciones sostenidas o error en estado estacionario [5].

En aplicaciones de manipulación, un brazo robótico puede llegar a transportar objetos de distintas masas y geometrías, lo que implica que cada nuevo objeto altera instantáneamente la inercia del sistema [6].

2. Metodología

Esta sección se divide en tres pilares fundamentales: primero, la derivación matemática de la dinámica del sistema mediante el formalismo de Euler-Lagrange, identificando la inercia como el parámetro crítico de incertidumbre; segundo, el desarrollo de la técnica de identificación algebraica de Fliess; y finalmente, el diseño del controlador por par calculado.

2.1. Dinámica del Sistema

Se considera un péndulo de 1-GDL. Es usual que se considere un péndulo compuesto por una varilla rígida de longitud L_B , masa m_B e inercia J_B , la cual se mueve bajo un par rotacional τ aplicado a su extremo articulado. Por facilidad se supondrá que es un péndulo simple, es decir, la varilla es de masa e inercia despreciables, conservándose solo como un sólido de longitud L .

La ecuación de movimiento no lineal que describe la dinámica del péndulo es:

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + mgL \sin(\theta(t)) = \tau(t) \quad (1)$$

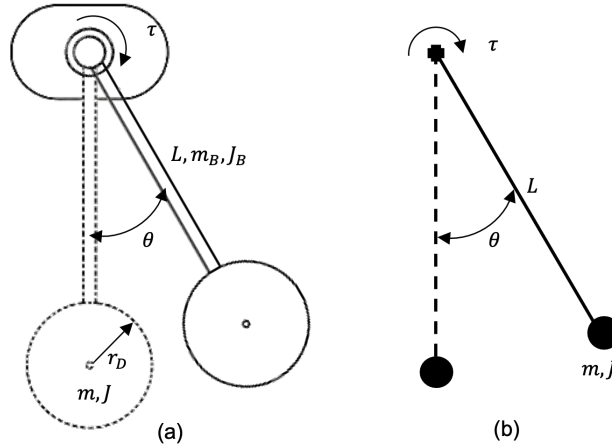


Figura 1: Representación esquemática del sistema mecánico, comparando (a) el péndulo real con masa y geometría compleja frente al (b) modelo de péndulo simple utilizado para la derivación del modelo dinámico de control.

2.2. Estimación Algebraica de la Inercia

Se emplea la técnica de identificación algebraica propuesta por Fließ [7]. El objetivo central es aislar el parámetro J mediante el uso de operadores de aniquilación. Se define una variable auxiliar de excitación $v(t)$:

$$v(t) = \tau(t) - b\dot{\theta}(t) - mgL \sin(\theta(t)) \quad (2)$$

La ley de estimación algebraica \hat{J} obtenida es:

$$\hat{J}(t) = \frac{\int^{(3)} t^2 v(t) d\tau^3}{2 \int^{(3)} \theta(t) d\tau^3 - 4 \int^{(2)} t\theta(t) d\tau^2 + \int t^2 \theta(t) d\tau} \quad (3)$$

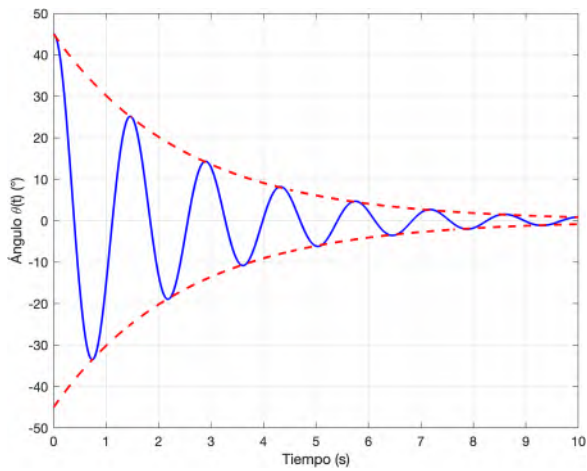
3. Resultados

El desarrollo se llevó a cabo en MATLAB R2022b, empleando una frecuencia de muestreo de 1 kHz ($T_s = 0,001$ s).

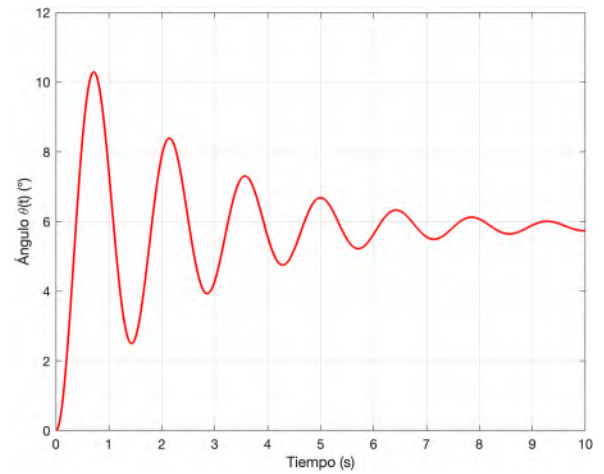
Tabla 1: Parámetros físicos del péndulo

Parámetro	Símbolo	Magnitud	Unidades
Masa puntual	m	1	kg
Longitud del brazo	L	0.5	m
Coefficiente de fricción	b	0.1	N·m·s/rad
Inercia (calculada)	J	0.25	kg·m ²
Gravedad	g	9.81	m/s ²

La Fig. 3 muestra la convergencia de la estimación $\hat{J}(t)$ frente a la inercia real del sistema.



(a) Decaimiento libre



(b) Respuesta al escalón

Figura 2: Validación del comportamiento dinámico del péndulo en lazo abierto mediante pruebas de (a) respuesta transitoria ante condiciones iniciales y (b) seguimiento de referencia tipo escalón.

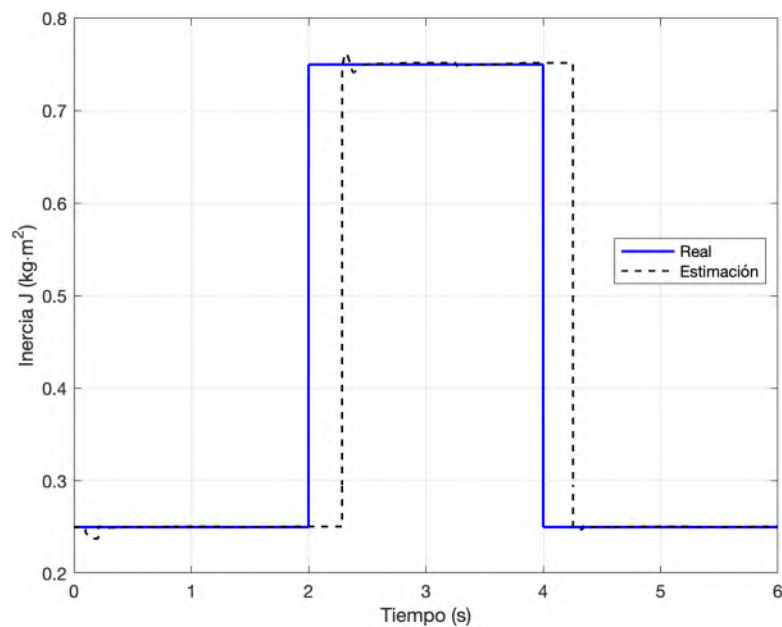


Figura 3: Evolución temporal del parámetro de inercia estimado mediante la técnica de identificación algebraica de Fliess, demostrando la convergencia rápida y robusta hacia el valor real del sistema en tiempo finito.

4. Conclusiones

Se demostró que la técnica de identificación algebraica de Fliess supera las limitaciones de los estimadores asintóticos tradicionales. Los resultados confirman que el control adaptable indirecto logra una invariancia de desempeño".

Créditos de los Autores

Alvarez Sánchez, Ervin Jesús: Conceptualización, Metodología, Redacción - borrador original.

Aldana Franco, Fernando: Conceptualización, Validación, Redacción - revisión y edición.

Leyva Retureta, José Gustavo: Metodología, Software, Redacción - revisión y edición.

Sánchez Moreno, Alejandro: Validación, Redacción - revisión y edición.

Referencias

- [1] D.V. Resende, M.V.G. de Moraes y S.M. Avila. "Experimental Analysis of One-Degree-of-Freedom (1DoF) Dynamic System Controlled by Optimized Inverted Pendulum". En: *Journal of Vibration Engineering and Technologies* 8 (2020), págs. 471-481. DOI: [10.1007/s42417-020-00198-2](https://doi.org/10.1007/s42417-020-00198-2).
- [2] D. G. Tolasa. "Theoretical Analysis of a Simple Pendulum Experiment". En: *International Journal of Current Research in Science, Engineering and Technology* 8.1 (2025), págs. 214-218. DOI: [10.30967/IJCRSET/Diriba-Gonfa-Tolasa/168](https://doi.org/10.30967/IJCRSET/Diriba-Gonfa-Tolasa/168).
- [3] S. P. Bhattacharyya. "Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results". En: *Annual Reviews in Control* 44 (2017), págs. 45-77. DOI: [10.1016/j.arcontrol.2017.05.001](https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2017.05.001).
- [4] V. Karlova-Sergieva. "Robust Performance Assessment of Control Systems with Root Contours Analysis". En: *Cybernetics and Information Technologies* 25.2 (2025), págs. 83-99. DOI: [10.2478/cait-2025-0013](https://doi.org/10.2478/cait-2025-0013).
- [5] Y. Xia et al. "A Cooperative Adaptive VSG Control Strategy Based on Virtual Inertia and Damping for Photovoltaic Storage System". En: *Energies* 18.6 (2025), pág. 1505. DOI: [10.3390/en18061505](https://doi.org/10.3390/en18061505).
- [6] T. Sands. "Autonomous Real-Time Mass Center Location and Inertia Identification for Grappling Space Robotics". En: *Technologies* 13.4 (2025), pág. 148. DOI: [10.3390/technologies13040148](https://doi.org/10.3390/technologies13040148).
- [7] M. Fliess y H. Sira-Ramirez. "An algebraic framework for linear identification". En: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003), págs. 151-168. DOI: [10.1016/j.actaastro.2016.11.019](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.11.019).